

Probability and Random Processes

ECS 315

Asst. Prof. Dr. Prapun Suksompong

prapun@siit.tu.ac.th

9 Expectation and Variance



Office Hours:

BKD, 6th floor of Sirindhralai building

Wednesday 14:00-15:30

Friday 14:00-15:30

Expectation and Variance

- The **expectation** (or **mean** or **expected value**) of a discrete random variable X is given by

$$\mathbb{E}X = \sum_x xp_X(x)$$

- The expected value of a function g of a RV X is given by

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$$

- The **variance** of a RV X is given by

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

- The **standard deviation** of a RV X is given by

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$$



Example

$$\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

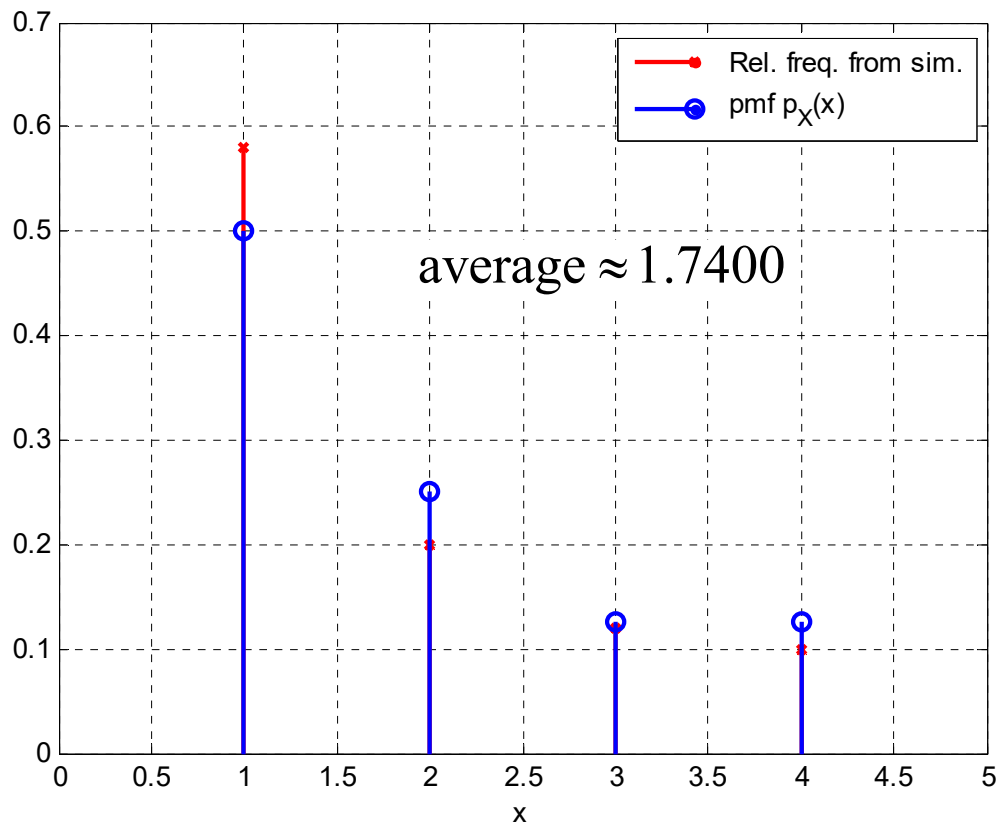
$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 1, \\ 1/4, & x = 2, \\ 1/8, & x \in \{3, 4\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
2 1 1 2 1 4 1 1 1 1
1 1 4 1 1 2 4 2 2 1
3 1 1 2 3 2 4 1 2 4
2 1 1 2 1 1 3 3 1 1
1 3 4 1 4 1 1 2 4 1
4 1 4 1 2 2 1 4 2 1
4 1 1 1 1 2 1 4 2 4
2 1 1 1 2 1 2 1 3 2
2 1 1 1 1 1 1 2 3 2
2 1 1 2 1 4 2 1 2 1
```

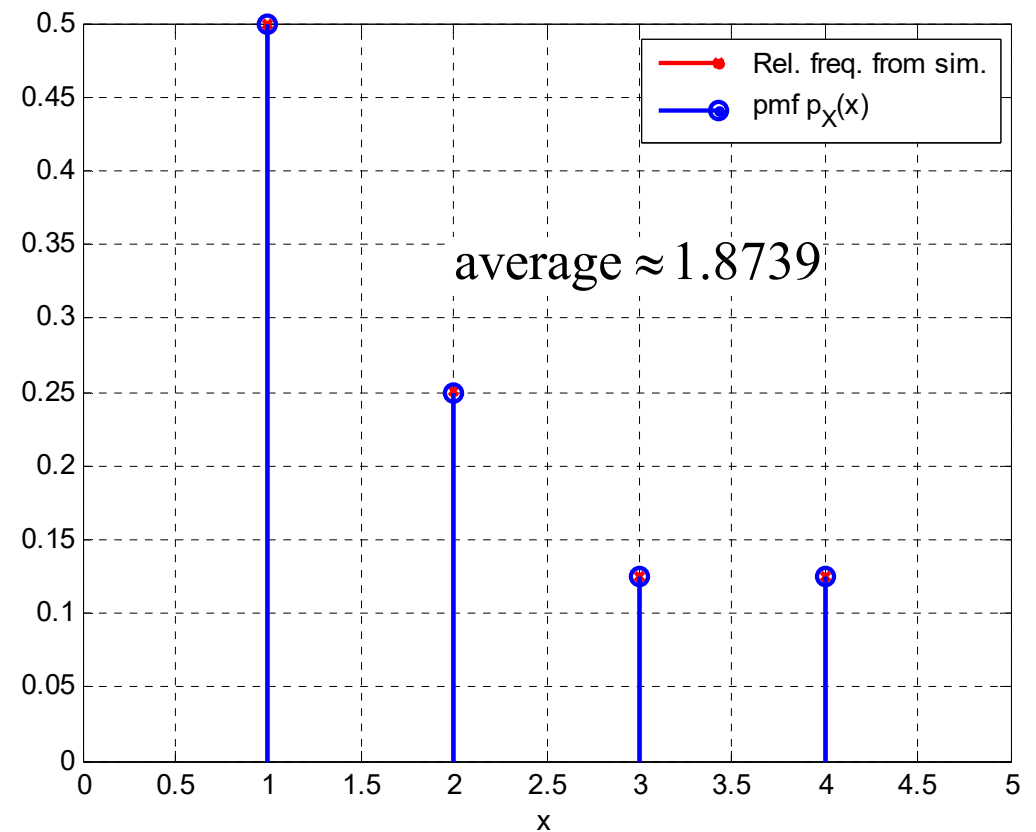


Example

$n = 100$



$n = 10^6$

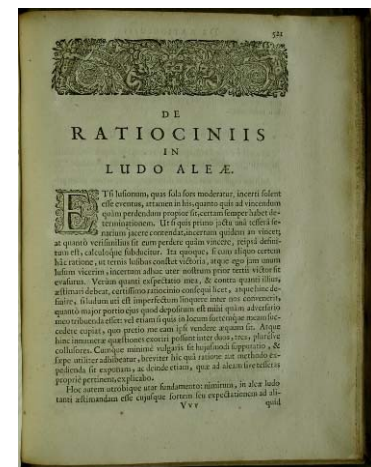


As $n \rightarrow \infty$, the average will converge to $\mathbb{E}X = \frac{15}{8} = 1.875$



Christiaan Huygens (1629-1695)

- Dutch astronomer
- In 1657, wrote the first treatise (textbook) on probability theory: “On Reasoning in Games of Chance”
 - Van Rekeningh in Spelen van Geluck
 - De ratiociniis in ludo aleae
 - <http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/huygens.htm>
- Interest sparked partly by the work of Pascal and Fermat.
- Originally introduced the concept of **expected value**.

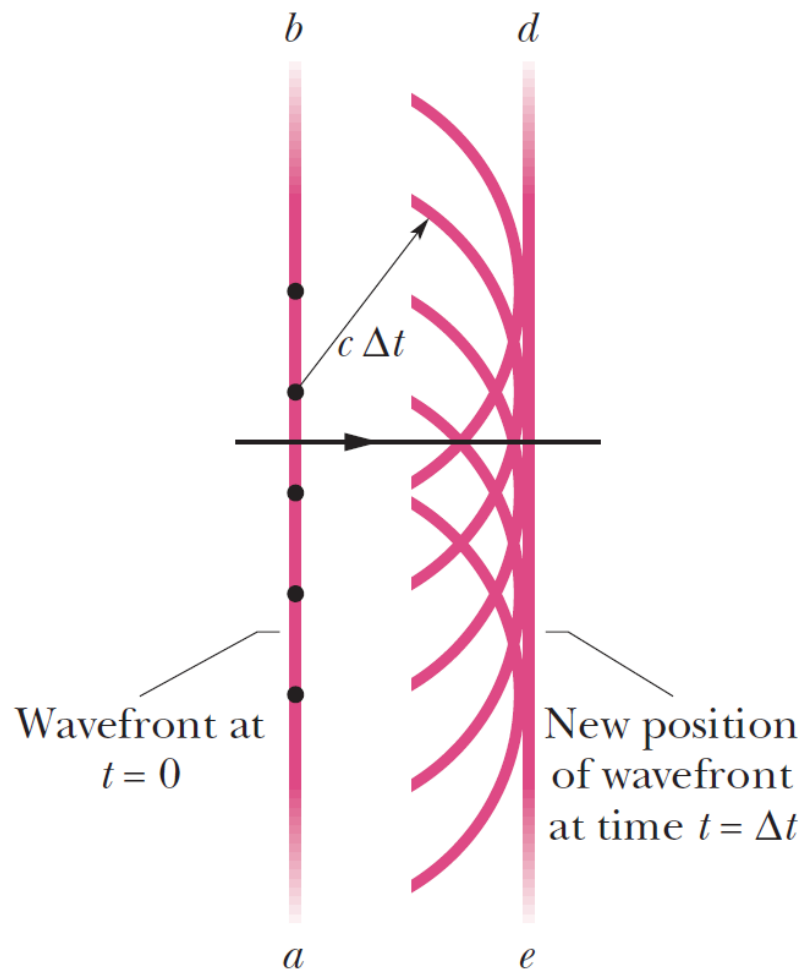


http://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens#mediaviewer/File:Christiaan_Huygens.jpg
http://bc.uu.leidenuniv.nl/bc/tentoonstelling/Huygens/Images/html/03_2.html

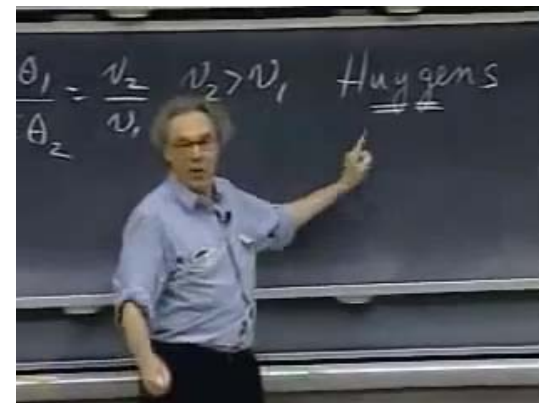


Christiaan Huygens (1629-1695)

- Also famous for the “**Huygens’ Principle**”



All points on a wavefront serve as point sources of spherical secondary wavelets. After a time t , the new position of the wavefront will be that of a surface tangent to these secondary wavelets.



Calculations of Expected Values



sum exp(-alpha) k * alpha^k / k! from k =0 to infinity



Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \exp(-\alpha) \alpha^k}{k!} = \alpha \quad \mathbb{E}X = \alpha$$

n! is the factorial function »

Poisson(α)

sum k * n!/(k!(n-k)!) * p^k * (1-p)^(n-k) from k =0 to n



Examples Random

Sum:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k n! p^k (1-p)^{n-k}}{k! (n-k)!} = n p \quad \mathbb{E}X = n p$$

n! is the factorial function »

Binomial(n,p)



Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

<https://www.pptvhd36.com/news/ประเด็นร้อน/62583>



- ตั้งแต่วันที่ 1 ก.ย. 2560 เป็นต้นไป สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ปรับปรุงรูปแบบสลากฯ ใหม่ จากเดิมฉบับคู่ 80 บาท (ฉบับละ 40 บาท) เป็นรูปแบบใบเดี่ยวฉบับละ 80 บาท
- เงินรางวัลยังเท่าเดิม เปลี่ยนแค่ขนาดที่กระชั้นเล็กลงเท่านั้น



Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)



สำนักงานสลากกินแบ่งรัฐบาล ช่วยราษฎร์ เสริมรัฐ อำนวยคุณุติธรรม									
ผลการออกรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล									
งวดประจำวันที่ 1 พฤศจิกายน 2560									
ตรวจสอบรางวัลที่ใจ หรือออนไลน์ได้ที่ โทร. 1900-1900-10, 0-2520-8099									
ตรวจสอบทาง Internet ได้ที่เว็บไซต์ www.glo.or.th									
รางวัลที่ 1	เลขหน้า 3 ตัว			เลขท้าย 3 ตัว			เลขท้าย 2 ตัว		
รางวัลละ 6,000,000 บาท	รางวัลละ 4,000 บาท			รางวัลละ 4,000 บาท			รางวัลละ 2,000 บาท		
533726	165	425	036	485	8	5			
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1	รางวัลละ 100,000 บาท			รางวัลที่ 2			รางวัลละ 200,000 บาท		
	5 3 3 7 2 5	5 3 3 7 2 7			207204	440879	497237	617980	951035
รางวัลที่ 3	รางวัลละ 80,000 บาท								
195866	221435	271632	331751	356817	578206	643292	824536	852509	965400
รางวัลที่ 4	รางวัลละ 40,000 บาท								
001263	125838	216680	281155	428264	521350	570718	698919	773706	877149
009858	129205	227663	302041	450928	540510	575848	712207	775833	889479
070880	145388	240610	379756	469579	543337	607203	724415	788521	926624
104008	156493	247967	383075	473765	556546	622114	738140	834022	931437
124404	203055	268386	411755	501283	557169	696245	764510	873762	956856
รางวัลที่ 5	รางวัลละ 20,000 บาท								
006555	098597	210554	324029	424320	528172	615441	741700	857793	929052
007883	106578	229044	329876	429901	528280	617283	765199	867177	932719
017809	113286	230161	364734	456938	537719	618915	780694	873490	942028
019293	122017	235006	372221	463861	542591	640249	798210	878860	945762
038276	145821	252163	396723	467003	544322	647038	826783	892015	952213
044624	150996	260500	399108	485599	548390	670524	830187	899309	954310
047020	154176	266801	400566	489312	554191	695390	843336	901466	957227
051909	187116	269421	401648	512292	568991	698328	845846	911913	966534
070407	194007	279935	406118	522529	573434	713448	849567	924447	972987
095244	203781	298608	410462	525959	574226	730669	855583	928129	975753

นายพิภพ ปานแย้ม รองนายกเทศมนตรีเทศบาลเมืองคลองหลวง นำล็อตเตอรี่จำนวนมากติดฝาผนังบ้าน
ของตนที่ อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี

“ตอหวย” ปลง นำหวยมากทำ “วอลเปเปอร์บ้าน”



Government Lottery (สลากกินแบ่งรัฐบาล)

เงื่อนไขเงินรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล

(ใช้ตั้งแต่งวดวันที่ 1 กันยายน 2560 เป็นต้นไป)
 สลาก 1 ชุด มี 1 ล้านฉบับ ฉบับละ 80 บาท
 ถ้าจำหน่ายหมด กำหนดเงินรางวัลต่อชุด ดังนี้



รางวัล	จำนวน	มูลค่า (บาท)
รางวัลที่ หนึ่ง	1 รางวัล	6,000,000
รางวัลที่ สอง	5 รางวัล	200,000
รางวัลที่ สาม	10 รางวัล	80,000
รางวัลที่ สี่	50 รางวัล	40,000
รางวัลที่ ห้า	100 รางวัล	20,000
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่หนึ่ง	2 รางวัล	100,000
รางวัลเลขหน้า 3 ตัว เสียง 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	4,000
รางวัลเลขท้าย 3 ตัว เสียง 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	4,000
รางวัลเลขท้าย 2 ตัว เสียง 1 ครั้ง	10,000 รางวัล	2,000

สลาก 1 ชุด มี 14,168 รางวัล เป็นเงิน 48,000,000 บาท

Expected Profit = -32

- ก. เงินรางวัลจะจ่ายแก่ผู้ถือสลากฉบับที่ถูกรางวัลนำมาขอรับ
- ข. ถ้าสลากจำหน่ายไม่หมด เงินรางวัลหนึ่งๆ ต้องลดลงตามส่วน
- ค. ผู้ถูกรางวัลต้องมาขอรับเงินรางวัลภายใน 2 ปี นับจากวันออกสลาก หากพ้นกำหนดจะนำส่งเป็นรายได้แผ่นดิน
- ง. ผู้ขอรับเงินรางวัลต้องชำระค่าอากรแสตมป์ ในอัตรา 1 บาท ของเงินรางวัล ทุก 200 บาท หรือเศษของ 200 บาท

Before Sep 1, 2015

ตารางที่ 4 การคำนวณกำไรขาดหวังของสลากกินแบ่งรัฐบาล

ชื่อรางวัล	จำนวนรางวัล	กำไร(1) =เงินรางวัล-ค่าซื้อสลาก ¹	โอกาสที่จะถูกรางวัล (2)
รางวัลที่ 1 ชุดใหญ่ 30 ล้านบาท	1	30 ล้าน - 40 บาท	0.00000333 %
รางวัลที่ 1 ชุดใหญ่ 16 ล้านบาท	1	16 ล้าน - 40 บาท	0.00000625 %
รางวัลที่ 1	46	2 ล้าน - 40 บาท	0.0001%
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1	92	5 หมื่น - 40 บาท	0.0002%
รางวัลที่ 2	230	1 แสน - 40 บาท	0.0005%
รางวัลที่ 3	460	4 หมื่น - 40 บาท	0.001%
รางวัลที่ 4	2,300	2 หมื่น - 40 บาท	0.005%
รางวัลที่ 5	4,600	1 หมื่น - 40 บาท	0.01%
เลขท้าย 3 ตัว	184,000	2 พัน - 40 บาท	0.4%
เลขท้าย 2 ตัว	460,000	1 พัน - 40 บาท	1.0%
สลากที่ไม่ถูกรางวัลใดๆ	-	-40 บาท	98.58%

¹ ไม่ได้รวมภาษี ณ ที่จ่ายไม่เกินร้อยละ 1 ของเงินรางวัล แต่จ่ายต่อการคำนวณ

Expected Profit = -16



Sep 2015 to Sep 2017

เงื่อนไขเงินรางวัลสลากกินแบ่งรัฐบาล



(ใช้ตั้งแต่งวดวันที่ 1 กันยายน 2558 เป็นต้นไป)

สลาก 1 ชุด มี 1 ล้านฉบับๆ ละ 40 บาท
ถ้าจำหน่ายหมด กำหนดเงินรางวัลต่อชุด ดังนี้

รางวัล	จำนวน	มูลค่า (บาท)
รางวัลที่ 1	1 รางวัล	3,000,000
รางวัลที่ 2	5 รางวัล	100,000
รางวัลที่ 3	10 รางวัล	40,000
รางวัลที่ 4	50 รางวัล	20,000
รางวัลที่ 5	100 รางวัล	10,000
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่หนึ่ง	2 รางวัล	50,000
รางวัลเลขหน้า 3 ตัว เสียง 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	2,000
รางวัลเลขท้าย 3 ตัว เสียง 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	2,000
รางวัลเลขท้าย 2 ตัว เสียง 1 ครั้ง	10,000 รางวัล	1,000

สลาก 1 ชุด มี 14,168 รางวัล เป็นเงิน 24,000,000 บาท

- ก. เงินรางวัลจะจ่ายแก่ผู้ถือสลากฉบับที่ถูกรางวัลนำมาขอรับ
- ข. ถ้าสลากจำหน่ายไม่หมด เงินรางวัลหนึ่งๆ ต้องลดลงตามส่วน
- ค. ผู้ถูกรางวัลโปรดไปขอรับรางวัลภายใน 2 ปี นับจากวันออกรางวัลสลาก

Expected Profit = -16



Can only press once

**INSTANT
\$1 MILLION**



**50% CHANCE OF
\$100 MILLION**



“Similar” Example



ฉันเหมือนคนที่มี**เสือใส่** แต่ยังไม่พอใจกับที่ฉันมี
เพราะแค่เพียงได้**เจอเสือใหม่** อย่างที่ฉันพอใจอยากจะ**ริบคว่ำ**
ใครก็เตือนว่าไม่คุ้มกับสิ่งที่ฉันทิ้งไป เพื่อสิ่งที่ฉันยังไม่ได้มา
ใครก็เตือนอย่าริบร้อนจะ**เสียง**ทำไมนะ แต่มันก็ยังล่ำไปหมดทั้งใจ

ฉันอุตส่าห์**ไม่รักเขา**เพื่อที่จะ**รักเธอ**
ยอมทุ่มเทหมดแล้วให้เธอ แล้วเธอก็ทิ้งไป
เสียเค้าแล้วยังต้อง**เสียใจ**เธอสอนฉันให้เข้าใจ
การลงทุน**เสียงเหลือเกิน**



[Stock Exchange of Thailand]

From the SET's website,...



“การ**ไม่ลงทุน**
มีความเสี่ยงมากกว่า”

